MINISTERE
E L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE
L'EQUIPEMENT ET DES TRANSPORTS

E.N.T.P.E. 1974

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 3 heures)

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 ; on note respectivement par O et I la matrice nulle et la matrice unité de $\mathfrak{A}$.

Pour toute matrice A de $\mathfrak{A}$, on désigne par $tr[A]$ la trace de A (somme des éléments diagonaux) et par $det[A]$ le déterminant de A.

On considère l'ensemble E des applications M de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{A}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix}$$

où a, b, c, et d sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables.

Pour toute application M appartenant à E, on note M' l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{A}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M'(x) = \begin{bmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{bmatrix}$$

où a', b', c', et d' sont les dérivées premières respectives de a, b, c, et d

et M'' l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{A}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M''(x) = \begin{bmatrix} a''(x) & b''(x) \\ c''(x) & d''(x) \end{bmatrix}$$

où a'', b'', c'', et d'' sont les dérivées secondes de a, b, c, et d.

Partie I

1°) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R} : \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) Montrer que pour tout rationnel q, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(qx) = q\, f(x)$$

b) Montrer alors que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(hx) = h\, f(x)$$

et en déduire l'expression de f.

.../...

2°) Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : \quad g(x+y) = g(x)\, g(y)$$

a) Montrer que g est soit nulle, soit strictement positive sur $\mathbb{R}$.

b) Dans le second cas, en déduire l'expression de g.

3°) Soit M une application appartenant à E et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : \quad M(x+y) = M(x)\, M(y)$$

et soit x_0 un nombre réel. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $M(x_0)$ la matrice $M(x)$ est-elle inversible pour tout x réel ?

Dans la suite du problème, on désignera par F le sous-ensemble de E des applications M vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : \quad M(x+y) = M(x)\, M(y) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) \text{ est inversible.} \end{cases}$$

Partie II

1°) Montrer que la multiplication des matrices confère à l'ensemble des $M(x)$ pour une application M donnée appartenant à F la structure de groupe commutatif

2°) Trouver toutes les applications M appartenant à F et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x)$ soit diagonale, c'est-à-dire : $M(x) = \begin{bmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & d(x) \end{bmatrix}$

3°) Soit M un élément de F. Montrer que si b n'est pas identiquement nulle, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} c(x) = \lambda\, b(x) \\ a(x) - d(x) = \mu\, b(x) \end{cases}$$

Enoncer un résultat analogue au précédent dans le cas où c n'est pas identiquement nulle.

4°) Soient M_1 et M_2 deux applications appartenant à E. On définit l'application $M_1\, M_2$ appartenant à E par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; [M_1\, M_2]\,(x) = M_1(x)\, M_2(x)$$

Calculer $[M_1\, M_2]'$ en fonction de M_1, M_2, M'_1 et M'_2.

5°) Montrer que, si M appartient à F, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : M'(x) = M'(0)\, M(x) = M(x)\, M'(0)$$

.../...

6°) Soit M un élément de F, avec $M(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix}$

Montrer que a, b, c, et d vérifient une même équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Partie III

Soit $A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ un élément de $\mathfrak{A}$.

On rappelle que la solution g d'une équation linéaire du second ordre est définie de manière unique par la donnée des conditions initiales $g(0)$ et $g'(0)$.

On considère maintenant l'application M appartenant à E et définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad M''(x) - \left[\mathrm{tr}[A_0]\right] M'(x) + \left[\det[A_0]\right] M(x) = 0 \\ \text{et} \quad M(0) = I, \quad M'(0) = A_0 \end{cases}$$

1°) Montrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M'(x) = A_0 M(x) = M(x) A_0$$

2°) a) Montrer que :

$\forall v \in \mathbb{R}$, $M(u+v) M(-u)$ est indépendant du réel u.

b) En déduire que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R} : M(u+v) M(-u) = M(v)$$

c) En déduire que M appartient à F.

Partie IV

Dans la partie IV, la notation M désigne un élément de F ; on note $M'(0) = A_0$.

1°) Soit m l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m(x) = \det[M(x)]$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m(x) = e^{\mathrm{tr}[A_0]\, x}$$

b) En déduire qu'il existe un réel k tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R} : M(x) = e^{kx} S(x)$$

S étant un élément de F qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \det[S(x)] = 1.$$

.../...

2°) Etant donnée l'application S déterminée à la question précédente, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{bmatrix}$$

Montrer que α, β, γ et δ vérifient une même équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants que l'on explicitera, ainsi que les conditions initiales, en fonction de A_0.

3°) a) Pour tout x réel, calculer les valeurs propres de $S(x)$, à l'aide du réel p défini par :

$$\varepsilon\, p^2 = \frac{\left[\mathrm{tr}[A_0]\right]^2}{4} - \det[A_0]$$

On distinguera différents cas suivant que : $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ ou $p = 0$.

b) En déduire les valeurs propres de $M(x)$ pour tout x réel, en fonction des valeurs propres de A_0.

4°) Calculer $S(x)$ et $M(x)$ pour tout x réel, lorsque :

a) $A_0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A_0 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

Partie V

Dans la partie V, A désigne un élément de $\mathcal{A}$ et M l'élément de F défini de façon unique à partir de A par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad M''(x) - \left[\mathrm{tr}[A]\right] M'(x) + \left[\det[A]\right] M(x) = 0 \\ \text{et} \quad M(0) = I \quad \text{et} \quad M'(0) = A. \end{cases}$$

On définit alors l'application Exp de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad A \xrightarrow{\text{Exp}} M(1)$$

1°) Montrer que l'on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Exp}(\lambda A) = M(\lambda)$$

2°) A et B étant deux matrices de $\mathcal{A}$ qui commutent ($AB = BA$), démontrer l'égalité:

$$\mathrm{Exp}(A + B) = \mathrm{Exp}(A)\,\mathrm{Exp}(B)$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail